

Integralrechnung- CORRIGE

Man muss alles begründen !

1. Bestimmen Sie alle Stammfunktionen von

a. $f(x) = 4x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 6x - 1$

b. $f(x) = \sin(3x)$

c. $f(x) = (7x^2 - 6x)^5(7x - 3)$

d. $f(x) = \sqrt{x}$

Lösung : Stammfunktionen :

a. $\frac{4}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - x + c$

b. $-\frac{1}{3}\cos(3x) + c$

c. $\frac{1}{12}(7x^2 - 6x)^6 + c$

d. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

2. **Definition :** Eine *Stammfunktion* einer Funktion f ist ...

Lösung : ... eine Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$.

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

a. Berechnen Sie

$$\int_0^2 f(x) dx$$

b. Bestimmen Sie den Inhalt der gesamten endlichen Fläche, die durch den Graphen von f und die x -Achse begrenzt wird.

Lösung : a. $\int_0^2 f(x) dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right)\Big|_0^2 = \left(\frac{1}{4} \cdot 16 - 8 + 4\right) - 0 = 0$

b. Schnittpunkte mit der x -Achse :

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

In $]0; 1[$: $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$, i.e. f ist positiv in $]0; 1[$.

In $]1; 2[$: $f(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{8} < 0$, i.e. f ist negativ in $]1; 2[$.

Aus Teilangabe a folgt, dass beide Flächeninhalte gleich gross sind. Also gilt :

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \mathcal{A}_1 = 2 \cdot \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx = 2 \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) - 0 = \frac{1}{2}$$

-
4. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 - 3x + 3$ und $g(x) = 2x - 3$. Bestimmen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die durch die Graphen von f und g begrenzt wird.

Lösung : Schnittpunkte der Graphen : $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 ; x = 3$.

In $]2; 3[$: $f(\frac{5}{2}) = \frac{7}{4}$ und $g(\frac{5}{2}) = 2 > f(\frac{5}{2})$. g ist grösser als f in $]2; 3[$. Es folgt :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_2^3 (g(x) - f(x)) dx = \int_2^3 [(2x - 3) - (x^2 - 3x + 3)] dx = \int_2^3 (-x^2 + 5x - 6) dx = \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x \right) \Big|_2^3 = \dots = \frac{1}{6} \end{aligned}$$