

Logarithmusfunktion- CORRIGE

Man muss alles begründen !

1. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Funktionen :

a. $f(x) = \ln(-2x + 3)$

b. $f(x) = \ln(x^2 - 9x + 20)$.

Lösung : a. Bedingung : $-2x + 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} > x$. Das heisst $D(f) =] - \infty; \frac{3}{2}[$.

b. Bedingung : $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5) > 0$. Mit einer Zeichentabelle findet man den Bereich : $D(f) =] - \infty; 4[\cup] 5; +\infty[$.

2. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen :

a. $f(x) = \ln(2x - 3)$

b. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$.

Lösung : a. $f'(x) = \frac{2}{2x - 3}$ b. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$.

3. Berechnen Sie :

a. $\int \frac{1}{5x - 4} dx$

b. $\int_3^4 \frac{8x}{4x^2 - 5} dx$

c. $\int \frac{2x^2 - x + 2}{x - 1} dx$

Lösung : a. $\int \frac{1}{5x - 4} dx = \frac{1}{5} \ln |5x - 4| + c$

b. $\int_3^4 \frac{8x}{4x^2 - 5} dx = (\ln |4x^2 - 5|)|_3^4 = \ln 59 - \ln 31 = \ln \frac{59}{31}$

c. $\int \frac{2x^2 - x + 2}{x - 1} dx$. Mit Hilfe einer Polynomialdivision findet man :

$$\int \frac{2x^2 - x + 2}{x - 1} dx = \int \left(2x + 1 + \frac{3}{x - 1} \right) dx = x^2 + x + 3 \ln |x - 1| + c$$

4. Von der Funktion $f(x) = \frac{3 - \ln x}{x}$ wird die erste Ableitung gegeben :

$$f'(x) = \frac{\ln x - 4}{x^2}$$

Bestimmen Sie :

- den Definitionsbereich, die Nullstellen und die Zeichentabelle.
- die Asymptoten.
- das Monotonieverhalten (inkl Koordinaten der eventuellen Hoch- oder Tiefpunkte).

Lösung : a. $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3 \cong 20.09$.

Die Zeichentabelle ist dann :

x	0	e^3
f	//////// //	+++ 0 ---

- b. Aus

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 - \ln x}{x} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \ln x}{x} = 0 \quad \text{weil} \quad x \gg \ln x$$

folgt, dass es eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = 0$ (von rechts) und eine rechtsseitige waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$ gibt.

- c. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 = \ln x \Leftrightarrow x = e^4 \cong 54.6$. Das Monotonieverhalten ist gegeben durch :

x	0	e^4
f'	//////// //	--- 0 +++
f	//////// //	↘ MIN ↗

Da $f(e^4) = -\frac{1}{e^4} \cong -0.02$, gibt es einen Tiefpunkt $T(54.6; -0.02)$.