Exponentialfunktion - CORRIGE

Man muss alles begründen !

1. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = (x^3 + x^2)e^{-x}$$

Gefragt wird :

a. $D(f)$, die Nullstellen, die Zeichentabelle von f und die Symmetrieeigenschaften;

b. die Gleichungen der Asymptoten;

c. die Ableitung und das Monotonieverhalten (inkl. Koordinaten der eventuellen Hoch- oder Tiefpunkte). Falls Sie die Ableitung nicht gefunden haben, benutzen Sie

$$f'(x) = -x(x^2 - 2x - 2)e^{-x}$$

c. der Graph von f.

Lösung : a. $D(f) = \mathbb{R}$ ist symmetrisch. Aus $f(-x) = (-x^3 + x^2)e^{x} \neq \pm f(x)$ folgt, dass f weder gerade noch ungerade ist. $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$ $x = 0,\ x = -1$. Zeichentabelle :

x		-1		0	
f	$---$	0	$+++$	0	$+++$

b. Es gibt keine senkrechte Asymptote (weill $D(f) = \mathbb{R}$). Aus

$$\lim_{x\to+\infty}((x^3 + x^2)e^{-x}) = 0 \quad (\text{weil} \quad \exp >> x^n) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty}((x^3 + x^2)e^{-x}) = -\infty$$

folgt, dass es eine rechtsseitige waagerechte Asymptote gibt ($y = 0$), aber keine linksseitige.

c. $f'(x) = (3x^2 + 2x)e^{-x} + (x^3 + x^2)(-e^{-x}) = -e^{-x}x(x^2 - 2x - 2)$. Nullstellen der Ableitung :

$x = 0$ und $x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{3} \cong \begin{cases} 2.73 \\ -0.73 \end{cases}$

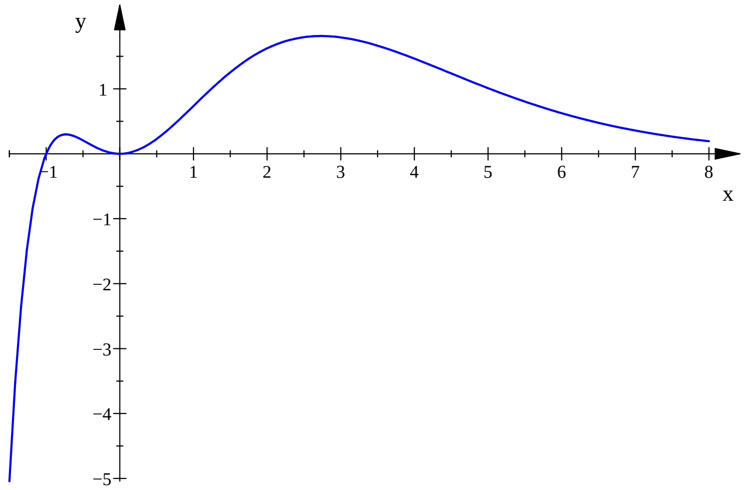
Monotonieverhalten :

x		-0.73		0		2.73	
f'	$+++$	0	$---$	0	$+++$	0	$---$
f	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Da $f(-0.73) \cong 0.30$, $f(0) = 0$ und $f(2.73) \cong 1.81$, gibt es drei Hoch- oder Tiefpunkte :

$H_1(-0.73; 0.30)$, $T(0; 0)$, $H_2(2.73; 1.81)$.

d. Graph



2. Berechnen Sie :

a. $(e^{4x-5})'$ b. $(e^{\sin x})'$ c. $(e^{\frac{1}{x}})'$ d. $\int e^{7x-1}\,dx$ e. $\int_1^2 xe^{3x^2-1}\,dx$

Lösung : a. $(e^{4x-5})' = 4e^{4x-5}$ b. $(e^{\sin x})' = \cos x \cdot e^{\sin x}$

c. $(e^{\frac{1}{x}})' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ d. $\int e^{7x-1}\,dx = \frac{1}{7}e^{7x-1} + c$ und

e. $\int_1^2 xe^{3x^2-1}\,dx = \frac{1}{6}e^{3x^2-1}\Big|_1^2 = \frac{1}{6}(e^{11} - e^2)$ weil $(3x^2-1)' = 6x$