Die Gerade - 2. Teil - CORRIGE

Man muss alles rechtfertigen !

1. Gegeben ist die Gerade $d \ : \ 5x - 12y + 24 = 0$, sowie die Punkte $P(2;3)$, $Q(6;-1)$ und $R(0;2)$.

a. Bestimmen Sie den Abstand von d zu den verschiedenen Punkten.

b. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Mittelsenkrechten zur Strecke PQ.

c. Bestimmen Sie das Bild des Punktes $T(-2;-27)$ unter der Spiegelung an d.

Lösung : a. Mit der Abstandsformel : $\delta(T;d) = \dfrac{|5x_0 - 12y_0 + 24|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \dfrac{|5x_0 - 12y_0 + 24|}{13}$

erhält man $\delta(P;d) = \frac{|5\cdot 2 - 12\cdot 3 + 24|}{13} = \frac{|-2|}{13} = \frac{2}{13}$, $\delta(Q;d) = \frac{|5\cdot 6 - 12\cdot(-1) + 24|}{13} = \frac{66}{13}$ und

$\delta(R;d) = 0$ i.e. $R \in d$.

b. Der Mittelpunkt der Strecke PQ ist $M(4;1)$. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Mittelsenkrechten s. Es folgt (Satz 5) : $s \ : \ 4x - 4y + c = 0$. M gehört zu s : $16 - 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -12$. Schliesslich lautet die Gleichung von s : $x - y - 3 = 0$.

c. Die Senkrechte p zu d schneidet d in T'. Das Spiegelbild T'' ist gegeben durch $\overrightarrow{OT''} = \overrightarrow{OT} + 2\overrightarrow{TT'}$.

Aus der Gleichung von d folgt die von $p \ : \ 12x + 5y + c = 0$. T gehört zu $p \ : \ -24 - 135 + c = 0 \Leftrightarrow c = 159$. Schliesslich gilt $p \ : \ 12x + 5y + 159 = 0$.

Den Schnittpunkt T' kann man mit einem Gleichungssystem berechnen ($\{T'\} = p \cap d$).

Man erhält $T'(-12;3)$. Schliesslich :

$$\overrightarrow{OT''} = \overrightarrow{OT} + 2\overrightarrow{TT'} = \begin{pmatrix} -2 \\ -27 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 21 \end{pmatrix}, \text{ i.e. } T''(-22;21).$$

2. Ein (in C) rechtwinkliges Dreieck ABC ist gegeben durch $AB \ : \ 3x - 4y + 5 = 0$, $AC \ : \ 5x + 12y - 27 = 0$, sowie $B(9;?)$.

a. Bestimmen Sie die zweite Koordinate von B.

b. Bestimmen Sie die Gleichungen der Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC durch A.

c. Welche der beiden Winkelhalbierenden schneidet die Seite BC des Dreiecks ? Rechtfertigen Sie !

d. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Hypotenuse des Dreiecks ABC.

Lösung : a. Durch Einsetzen der Abszisse von B in die Gleichung von AB findet man $? = 8$.

b. Mit Hilfe der Formel :

$$\frac{3x - 4y + 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm \frac{5x + 12y - 27}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \Leftrightarrow \frac{3x - 4y + 5}{5} = \pm \frac{5x + 12y - 27}{13} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13(3x - 4y + 5) = \pm 5(5x + 12y - 27) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 56y + 100 = 0 \quad m = \frac{1}{8} \\ \\ 32x + 4y - 35 = 0 \quad m' = -8 \end{cases}$$

c. Mit Hilfe einer Zeichung sieht man, dass er nur eine Senkrechte zu AC durch B gibt, also nur ein mögliches rechtwinkliges Dreieck. Die gesuchte Winkelhalbierende hat eine kleine positive Steigung. Es ist also $7x - 56y + 100 = 0$.

d. Da das Dreieck in C rechtwinklig ist, ist die Hypotenuse die Seite $AB \ : \ 3x - 4y + 5 = 0$.