Analysis - 5 : Ableitung - 1. Teil - CORRIGE

Man muss alles begründen !

1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{(x-1)^2}$$

Man kennt noch folgendes :

- f ist weder gerade noch ungerade,
- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
- die Zeichentabelle von f ist

x		-3		-2		1	
f	$+++$	0	$---$	0	$+++$	$\|\|$	$+++$

a. Bestimmen Sie die Asymptoten von f (inkl. gegenseitige Lage), die Ableitung f' und das Monotonieverhalten (inkl. Koordinaten der eventuellen Hoch- oder Tiefpunkte).

b. Zeichnen Sie den Graphen von f. Gibt es eine neue Symmetrieeigenschaft ?

c. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt mit Abszisse $a = 2$.

d. Unter welchem Winkel schneidet der Graph von f die x-Achse (alle Winkel) ?

Lösung :

a. Aus $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{(x-1)^2} = \infty$ folgt, dass $x = 1$ die senkrechte Asymptote der Funktion ist. Mit Hilfe der Polynomialdivision findet man die waagerechte Asymptote $y = 1$ und $\delta(x) = \dfrac{7x+5}{(x-1)^2}$. Die gegenseitige Lage ist dann

x		$-\frac{5}{7}$		1	
δ	$---$	0	$+++$	$\|\|$	$+++$
f	unter	schneidet	über	$\|\|$	über

$$f'(x) = \frac{(2x+5)(x-1)^2 - (x^2+5x+6)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[(2x+5)(x-1) - 2(x^2+5x+6)]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x + 5x - 5 - 2x^2 - 10x - 12}{(x-1)^3} = \frac{-7x-17}{(x-1)^3}$$

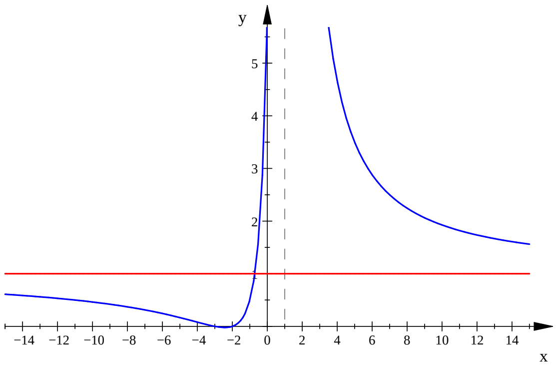
Einzige Nullstelle : $x = -\dfrac{17}{7}$. So ist das Monotonieverhalten :

x		$-\frac{17}{7}$		1	
f'	$---$	0	$+++$	$\|$	$---$
f	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	$\|$	$\searrow$

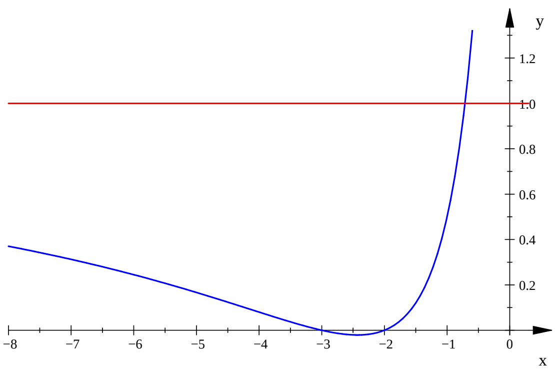
Es gilt $f(-\frac{17}{7}) = -\frac{1}{48} \cong -0.02$. Der Tiefpunkt ist $T(-2.4; -0.02)$.

b. Graph der Funktion :

Graph



Intervall $[-8; 0]$



Es gibt keine neue Symmetrieeigenschaft.

c. Berührungspunkt A : $a = 2$, $f(a) = f(2) = 20$, i.e. $A(2; 20)$ ist der Berührungspunkt.

Die Steigung der Tangente an den Graphen in A ist $m = f'(2) = -31$. So lautet ihre Gleichung $t\ :\ y = -31x + h$. $A \in t$: $20 = -31 \cdot 2 + h \quad \Leftrightarrow \quad h = 82$. Schliesslich ist $t\ :\ y = -31x + 82$.

d. Die Steigung der Tangente an der Stelle $x = -3$ ist $m = f'(-3) = -\frac{1}{16} = \tan(\alpha_{-3}) \quad \Leftrightarrow$ $\alpha_{-3} \cong -3.58°$.

An der Stelle $x = -2$: $m = f'(-2) = \frac{1}{9} = \tan(\alpha_{-2}) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_{-2} \cong 6.34°$.