Analysis - 5 : Ableitung - 1. Teil - CORRIGE

Man muss alles begründen !

1. a. Definition (geometrisch) : Die *Ableitung* einer Funktion f an der Stelle $x = a$ ist ...

b. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = 4x^2 + 5x - 7$ mit Hilfe der Definition (Limes).

c. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ mit Hilfe der Definition (Limes).

d. Finden Sie das Beispiel einer Funktion $F(x)$, deren Ableitung die Funktion $f(x) = x^2$ ist (ohne Begründung).

Lösung :

a. ... die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = a$.

b. Es gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)^2 + 5(x+h) - 7 - (4x^2 + 5x - 7)}{h} = ...$$

$$... = \lim_{h\to 0} \frac{8xh + 4h^2 + 5h}{h} = \lim_{h\to 0}(8x + 4h + 5) = 8x + 5$$

c. Es gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

d. Zum Beispiel $F(x) = \frac{1}{3}x^3$.

---

2. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (kürzen Sie !)

$a(x) = 4x^3 + 3x^2 - 7x + 11$ $\quad b(x) = \sin(2x)$ $\quad c(x) = \dfrac{3x^2 + 7}{x - 1}$ $\quad d(x) = \sqrt{2x^3 - 1}$

$e(x) = (2x - 1)^3(x^2 + 2)^2$ $\quad f(x) = \cos^2(7x^2 - 6x)$ (erste Etappe) $\quad g(x) = \dfrac{3}{x^4}$

Lösung : $a'(x) = 12x^2 + 6x - 7;\qquad b'(x) = \cos(2x)\cdot 2 = 2\cos(2x)$

$$c'(x) = \frac{6x(x-1) - (3x^2+7)}{(x-1)^2} = ... = \frac{3x^2-6x-7}{(x-1)^2}$$

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^3-1}}(6x^2) = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3-1}}$$

$$e'(x) = 3(2x-1)^2 2(x^2+2)^2 + (2x-1)^3 2(x^2+2)2x =$$
$$= 2(2x-1)^2(x^2+2)[3(x^2+2) + x(2x-1)2] = 2(2x-1)^2(x^2+2)(7x^2-2x+6)$$

$$f'(x) = 2\cos(7x^2-6x)(-\sin(7x^2-6x))\cdot(14x-6)$$

$$g'(x) = 3\cdot\left(\frac{1}{x^4}\right)' = 3\cdot(x^{-4})' = 3(-4)x^{-5} = \frac{-12}{x^5}\qquad \text{oder}$$
$$g'(x) = 3\cdot\left(\frac{1}{x^4}\right)' = 3\frac{-(x^4)'}{(x^4)^2} = \frac{-12x^3}{x^8} = \frac{-12}{x^5}$$