Analysis - 3 : Asymptoten - CORRIGE

Man muss alles rechtfertigen !

1. Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^3 - 12x}{x^2 - 9}$$

Gefragt ist :

a. $D(f)$, Symmetrieeigenschaften;

b. Nullstellen und Zeichentabelle von f;

c. die Gleichungen der Asymptoten (inkl. gegenseitige Lage);

d. der Graph von f.

Lösung : a. $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = 3$. Es folgt $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. Der Definitionsbereich ist symmetrisch und es gilt

$$f(-x) = \frac{-3x^3 + 12x}{x^2 - 9} = -\frac{3x^3 - 12x}{x^2 - 9} = -f(x)$$

f ist also eine ungerade Funktion.

b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = -2,\ x = 2$. Zeichentabelle :

x		-3		-2		0		2		3	
f	$- - -$	$\|$	$+ + +$	0	$- - -$	0	$+ + +$	0	$- - -$	$\|$	$+ + +$

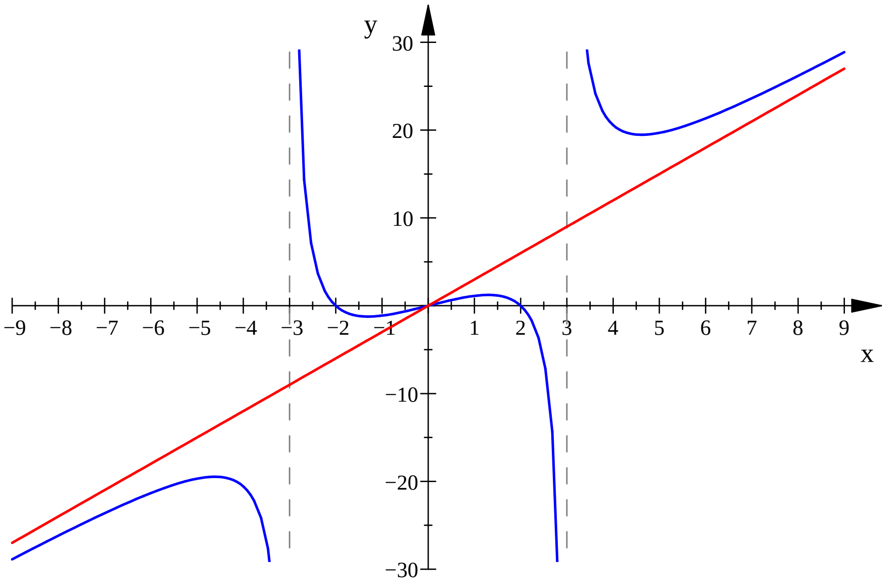
c. Aus $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty$ folgt, dass es zwei senkrechte Asymptoten gibt : $x = -3$ und $x = 3$. Aus der Polynomialdivision folgt

$$f(x) = 3x + \frac{15x}{x^2 - 9}$$

Es gibt also eine schräge Asymptote : $y = 3x$. Aus $\delta(x) = \dfrac{15x}{x^2 - 9}$ folgt die gegenseitige Lage :

x		-3		0		3	
δ	$---$	$\|$	$+++$	0	$---$	$\|$	$+++$
f	dessous	$\|$	dessus	coupe	dessous	$\|$	dessus

d. Graph der Funktion



2. Theorie.

a. Geben Sie die Definition der *waagerechten Asymptote* einer Funktion f.

b. Bestimmen Sie $\delta(x)$ für die Funktion

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

ohne die Polynomialdivision durchzuführen.

Lösung : a. Die Gerade $y = b$ ist die *waagerechte Asymptote* einer (gebrochenrationalen) Funktion $f(x)$, wenn : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

b. Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = 3$. Daraus folgt, dass $y = 3$ die waagerechte Asymptote von f ist. Schliesslich :

$$\delta(x) = f(x) - 3 = \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} - 3 = \frac{3x^2 - 3x + 2 - 3(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{-3x + 5}{x^2 - 1}$$