

Analysis - 1 - CORRIGE

Man muss alles rechtfertigen !

1. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 3x^2 - 7$ $g(x) = 2x + 5$

$$h(x) = \frac{4x^2 - 7x + 3}{x^2 - 7x + 12} \quad i(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 20} \quad j(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1}$$

- a. Berechnen Sie $(f \circ g)(x)$ und $(g \circ f)(x)$.
- b. Beweisen Sie, dass g aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ bijektiv ist und geben Sie die Umkehrfunktion.
- c. Warum ist f aus $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ nicht bijektiv ?
- d. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von h und von i .
- e. Sind die Funktionen f , h , j gerade ? ungerade ? weder gerade noch ungerade ?
Rechtfertigen Sie !
- f. Beweisen Sie, dass der Graph von g nicht tangent zum Graphen von f ist.
- g. Bestimmen Sie den Wert von b so, dass der Graph von $k(x) = 2x + b$ tangent zum Graphen von f ist.

Lösung : a. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 5) = 3(2x + 5)^2 - 7 = 12x^2 + 60x + 68$ und
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 - 7) = 2(3x^2 - 7) + 5 = 6x^2 - 9$.

- b. Sei $y \in \mathbb{R}$. Es gilt :

$$y = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y - 5}{2}$$

x existiert immer und ist eindeutig bestimmt. g ist also bijektiv und es gibt eine Umkehrfunktion :

$${}^r g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{y-5}{2} \end{array}$$

- c. Es gilt zum Beispiel $f(2) = f(-2) = 5$: $y = 5$ hat zwei Urbilder, f ist also nicht injektiv.

Anderer Beweis : $y = -8$ hat kein Urbild, weil $3x^2 - 7 = -8 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$ und diese Gleichung keine Lösung hat.

d. Aus $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$ folgt $D(h) = \mathbb{R} \setminus \{3; 4\}$.

Aus der Bedingung $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5) \geq 0$ folgt (Zeichentabelle) :
 $D(i) =]-\infty; 4] \cup [5; +\infty[$.

e. $D(f) = \mathbb{R}$ ist symmetrisch und $f(-x) = 3(-x)^2 - 7 = 3x^2 - 7 = f(x)$. Also ist f gerade.

$D(h) = \mathbb{R} \setminus \{3; 4\}$ ist nicht symmetrisch. h ist weder gerade noch ungerade.

$D(j) = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ist symmetrisch und

$$j(-x) = \frac{(-x)^3 - 2(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3 + 2x}{x^2 - 1} = -\frac{x^3 - 2x}{x^2 - 1} = -j(x)$$

Also ist j ungerade.

f. Wir lösen die Gleichung $f(x) = g(x) : 3x^2 - 7 = 2x + 5 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 12 = 0$. Die Diskriminante ist $\Delta = 4 + 144 = 148 > 0$, was bedeutet, dass es zwei Lösungen gibt, i.e. zwei Schnittpunkte. Die Graphen sind also nicht tangent.

g. Damit die Graphen tangent sind, muss die Gleichung $f(x) = k(x)$ genau eine (doppelte) Lösung haben : $3x^2 - 7 = 2x + b \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - (7 + b) = 0$. Um eine Lösung zu erhalten, muss die Diskriminante gleich null sein :

$$0 = \Delta = B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-(7 + b)) = 88 + 12b \Leftrightarrow b = -\frac{88}{12} = -\frac{22}{3}$$