

Séries de Taylor

NOM et PRENOM : *Il faut tout justifier et expliquer!*

1. Le coefficient général d'une série de MacLaurin est

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n - 5)}{n!(4^n)}$$

Déterminez son rayon de convergence, ainsi que l'intervalle ouvert dans lequel elle converge.

2. On donne la série de MacLaurin de la fonction $f(x) = \sqrt[4]{1+x}$:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{21}{384}x^3 - \frac{231}{6144}x^4 + \frac{3465}{122880}x^5 \pm \dots \quad \text{pour } |x| < 1$$

- Vérifiez le coefficient de x^4 de la série en le calculant dans les règles de l'art.
- Approximez $\sqrt[4]{18}$ à l'aide de cette série en vous arrêtant à l'ordre qui correspond à une erreur inférieure à 0.0001 **par rapport à la valeur machine**.
- Le théorème d'approximation confirme-t-il que l'ordre de la partie b correspond à cette précision ?
- Calculez la valeur exacte de $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{1+x} dx$, puis la valeur approchée en prenant les 5 premiers termes de la série. Quelle est l'erreur commise (différence) ?

3. a. A l'aide de séries de Taylor, calculez

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x}$$

- b. Vérifiez ce résultat avec la règle de Bernoulli-L'Hospital.