Primitives / Intégrales – Partie 2 : Aires et volumes

NOM et PRENOM : CORRIGE *Il faut tout justifier et expliquer !*

Donnez les réponses exactes et simplifiez celles qui peuvent l'être !

1. Les graphes des fonctions $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 3$ et $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 3$ déterminent plusieurs surfaces bornées du plan. Déterminez l'aire totale de ces surfaces.

- Intersection : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 + x - 3 = x^3 - 3x^2 + 4x - 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x+3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -3 ; x = 0 ; x = 1.$

- Position relative dans $[-3;0]$: $f(-1) = -2 - 1 - 1 - 3 = -7$
$g(-1) = -1 - 3 - 4 - 3 = -11 < f(-1)$ i.e. $f \geq g$

D'où $\mathcal{A}_1 = \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\,dx = \int_{-3}^{0} (x^3 + 2x^2 - 3x)\,dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{0} =$
$= 0 - \left(\frac{81}{4} - 18 - \frac{27}{2}\right) = -\frac{1}{4}(81 - 72 - 54) = -\frac{1}{4}(-45) = \frac{45}{4} = \mathcal{A}_1$

- Position relative dans $[0;1]$: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2} = -2{,}5$
$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 2 - 3 = \frac{1 - 6 + 16 - 24}{8} = -\frac{13}{8} \cong -1{,}625 > f\left(\frac{1}{2}\right)$
i.e. $f \leq g$

D'où $\mathcal{A}_2 = \int_{0}^{1} (-x^3 - 2x^2 + 3x)\,dx = \left(-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 0 = \frac{-3 - 8 + 18}{12} = \frac{7}{12} = \mathcal{A}_2$

Ainsi : $\mathcal{A}_{tot} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \frac{45}{4} + \frac{7}{12} = \frac{135 + 7}{12} = \frac{142}{12} = \underline{\frac{71}{6}}$.

2. Les graphes des fonctions $f(x) = 4x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2$ déterminent une surface bornée du plan. On fait tourner cette surface autour de l'axe Ox. Déterminez le volume du solide ainsi obtenu.

• Intersection : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4x - 1 = x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 1 ; x = 3$.

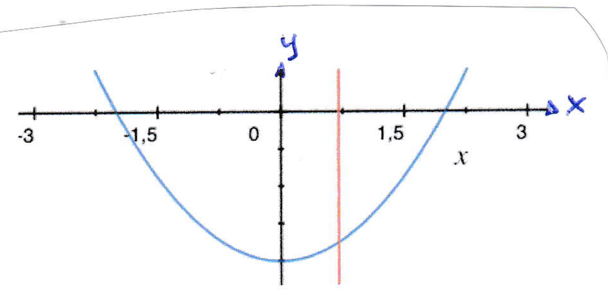
• Position relative : $f(2) = 7 ; g(2) = 6 < f(2)$: Donc $f(x) \geq g(x) \geq 0$ dans $[1;3]$

Alors $V = \pi \int_1^3 (f^2(x) - g^2(x))\,dx = \pi \int_1^3 [(16x^2 - 8x + 1) - (x^4 + 4x^2 + 4)]\,dx =$

$= \pi \int_1^3 (-x^4 + 12x^2 - 8x - 3)\,dx = \pi \left(-\frac{1}{5}x^5 + 4x^3 - 4x^2 - 3x\right)\Big|_1^3 =$

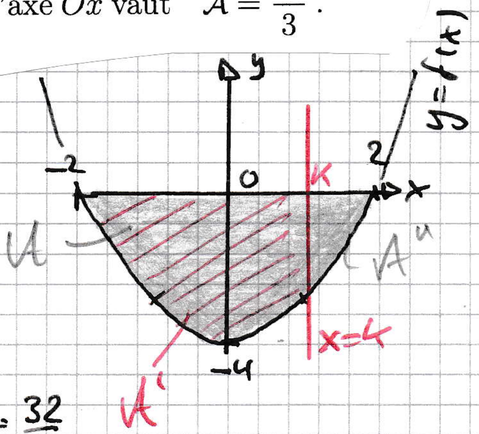
$= \pi\left(\left(-\frac{243}{5} + \underbrace{108 - 36 - 9}_{63}\right) - \left(-\frac{1}{5} + \underbrace{4 - 4 - 3}_{-3}\right)\right) = \pi\left(-\frac{242}{5} + 66\right) = \frac{88}{5}\pi$.

3. *Voir illustration ci-contre.*



On donne la fonction $f(x) = x^2 - 4$.

a. Vérifiez que la surface bornée comprise entre le graphe de f et l'axe Ox vaut $\mathcal{A} = \frac{32}{3}$.



• $f(x) = x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. $f(0) = -4 < 0$.

D'où $-\mathcal{A} = \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx = 2 \cdot \int_0^2 (x^2 - 4)\,dx =$ bornes sym. f pair

$= 2\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)\Big|_0^2 = 2 \cdot \left(\frac{8}{3} - 8\right) = 2 \cdot \left(-\frac{16}{3}\right) = -\frac{32}{3} \Leftrightarrow \mathcal{A} = \frac{32}{3}$.

b. Soit $K > 0$ un nombre réel. Déterminez l'équation polynômiale à coefficients entiers dont la solution K vérifie la condition suivante : l'aire de la surface comprise entre le graphe de f, l'axe Ox et la droite $x = K$ vaut 6. **On ne demande pas de résoudre cette équation !**

Methode 1.

$$\bullet -A' = -\frac{A}{2} + \int_0^k (x^2-4)\,dx = -\frac{16}{3} + \left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)_0^k = -\frac{16}{3} + \frac{1}{3}k^3-4k = -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}k^3-4k = -6+\frac{16}{3} = -\frac{2}{3} \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} k^3-12k+2=0$$

Methodes alternatives:

$$\text{M2: } A' = -\int_{-2}^{k} (x^2-4)\,dx = -\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)\Big|_{-2}^{k} = -\left(\frac{1}{3}k^3-4k\right)+\left(-\frac{8}{3}+8\right) = -\frac{1}{3}k^3+4k+\frac{16}{3} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}k^3-4k+\frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow k^3-12k+2=0.$$

$$\text{M3: } A' = \frac{32}{3} - A'' = \frac{32}{3} + \int_k^2 (x^2-4)\,dx = \frac{32}{3} + \left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)_k^2 = \frac{32}{3} + \left(\frac{8}{3}-8\right) - \left(\frac{1}{3}k^3-4k\right) =$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} - \frac{1}{3}k^3+4k = -\frac{1}{3}k^3+4k+\frac{16}{3} = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{3}k^3-4k+\frac{2}{3} = 0$$

$$\overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow} k^3-12k+2=0$$