1. Déterminez le centre et le rayon du cercle γ donné par

$$\gamma \; : \; x^2 + y^2 + 6x - 14y - 23 = 0$$

Par groupements : $x^2+6x+9-9+y^2-14y+49-49=23 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-7)^2 = 9+49+23=81$ i.e. $C(-3;7), r=9$.

2. Un cercle passe par les points $A(-2;6)$ et $B(-5;3)$. Son centre est situé sur la droite $2x+3y-1=0$. Déterminez l'équation du cercle.

Le centre est situé à l'intersection de la médiatrice du segment AB et de la droite donnée.

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ méd : $3x+3y+c=0$

Milieu de AB : $M(-\frac{7}{2};\frac{9}{2}) \in$ méd : $3\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+3\left(\frac{9}{2}\right)+c = -\frac{21}{2}+\frac{27}{2}+c=\frac{6}{2}+c \Leftrightarrow 3+c=0 \Leftrightarrow c=-3$

i.e méd : $x+y-1=0$.

Intersection : méd $\cap$ d : $\begin{cases} x+y-1=0 & \vert\; 2 & \vert\; 3 \\ 2x+3y-1=0 & \vert\; -1 & \vert\; -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y-1=0 \Leftrightarrow y=-1 \\ x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \end{cases}$

i.e. $C(2;-1)$.

Rayon : $r = \|\vec{AC}\| = \left\|\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{16+49} = \sqrt{65}$. D'où : $\gamma : (x-2)^2+(y+1)^2=65$.

3. A - On donne le cercle γ d'équation $(x-7)^2+(y-3)^2=25$. Déterminez les équations des tangentes au cercle passant par le point :

a. $A(3;6)$,

b. $B(9;14)$.

B - Déterminez les coordonnées d'un point du plan par lequel passent deux tangentes au cercle γ, l'une d'elles devant être verticale, et donnez les équations de ces deux tangentes.

A. a. $A(3;6) \in \gamma$? $(3-7)^2+(6-3)^2 = 16+9=25$: $A \in \gamma$.

Par dédoublement : $(x-7)(3-7)+(y-3)(6-3)=25 \Leftrightarrow -4x+28+3y-9=25$

$\Leftrightarrow 4x-3y+6=0$.

b. $B(9;14) \in \gamma$? $(9-7)^2+(14-3)^2 = 4+121=125>25$: B est extérieur au cercle. Il y a donc 2 tangentes issues de B.

On utilise la formule des tangentes de pente m :

$y - \beta = m(x-\alpha) \pm r\sqrt{m^2+1}$: $14 - 3 = m(9-7) \pm 5\sqrt{m^2+1} \iff$

$\iff 11 - 2m = \pm 5\sqrt{m^2+1} \overset{(\,)^2}{\iff} 121 - 44m + 4m^2 = 25m^2+25 \iff$

$\iff 21m^2 + 44m - 96 = 0 \iff m = \dfrac{-44 \pm \sqrt{10000}}{42} = \dfrac{-44 \pm 100}{42}$ $<$ $\dfrac{56}{42} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3} = m_1$; $-\dfrac{144}{42} = -\dfrac{72}{21} = -\dfrac{24}{7} = m_2$

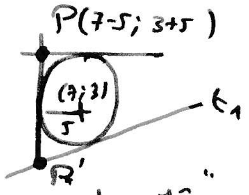
$t_1 : y = \frac{4}{3}x + h$, par $B(9;14)$: $14 = 12 + h \iff h = 2$ i.e. $t_1 : y = \frac{4}{3}x + 2 \iff 4x - 3y + 6 = 0$

$t_2 : y = -\frac{24}{7}x + h$, par $B(9;14)$: $14 = -\frac{216}{7} + h \iff h = \frac{314}{7}$ i.e. $t_2 : y = -\frac{24}{7}x + \frac{314}{7} \iff$

$\iff 24x + 7y - 314 = 0$

B. Tangente verticale + horizontale : $P(2;8)$: $x = 2$ vert.

$y = 8$ hor.



On reprend $t_1 : 4x - 3y + 6 = 0$ avec un point P' d'abscisse sous une extrémité"

de cercle : $P'(2; \frac{14}{3})$ ∴ t_1 ; $t_2 : x = 2$ etc.