TE - 3Mm s 1 | Exp/Log - Schu | VE 3.05.2024

## Problème 1 — 15,5

On donne la fonction $f(x)=(x^2-2x-14)\cdot e^{-x}$.

9 a. Étude de f. On demande :

• ED(f) : clairement : $ED(f)=\mathbb{R}$. 0,5

0,5

• Zéros et signe de f (donner les zéros exacts puis arrondis au centième près).

2

$$f(x)=0 \overset{e\neq 0}{\iff} x^2-2x-14=0 \iff x=\frac{2\pm\sqrt{4+56}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{60}}{2}=1\pm\sqrt{15} \;\begin{cases}4{,}87\\-2{,}87\end{cases}$$ 1

D'où le signe de f :

| x | | -2,87 | | 4,87 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f | + | 0 | − | 0 | + |

1

• Les éventuelles asymptotes horizontales et verticales de f.

2,5

• Pas d'AV car $ED(f)=\mathbb{R}$ 0,5

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\underbrace{x^2-2x-14}_{\to+\infty})\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}=0$ car $\exp \gg x^n$ : pas d'AH à gauche. 1

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\underbrace{x^2-2x-14}_{\to+\infty})\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}=+\infty$ : il y a une AH à droite : $y=0$. 1

• On donne la dérivée $f'(x)=-e^{-x}(x^2-4x-12)$. Déterminer les variations de f ainsi que les coordonnées des extrema (pas besoin de recalculer f' !)

4

Rem : $f'(x)=\left[(x^2-2x-14)e^{-x}\right]'=(2x-2)e^{-x}+(x^2-2x-14)e^{-x}(-1)=$
$=e^{-x}(2x-2-x^2+2x+14)=e^{-x}(-x^2+4x+12)=-e^{-x}(x^2-4x-12)$.

On a : $f'(x)=0 \overset{\exp\neq 0}{\iff} x^2-4x-12=(x-6)(x+2)=0 \iff x=-2 \,;\, x=6$ 1

D'où les variations :

| x | | -2 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | − | 0 | + | 0 | − |
| f | ↘ | MIN | ↗ | MAX | ↘ |

1,5

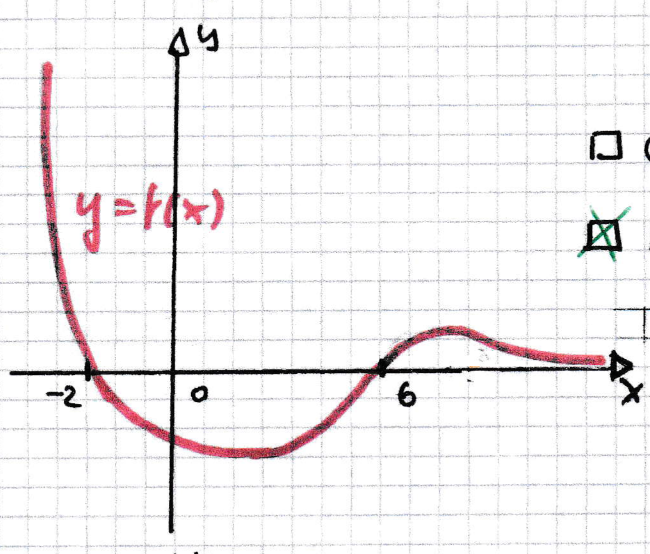
On a : $f(-2)=((-2)^2-2\cdot(-2)-14)e^{2}=-6e^{2}\cong-44{,}33$ 0,5

NOM+PRENOM :

Exercice 1 partie b: graphes à choix.

3,5

①



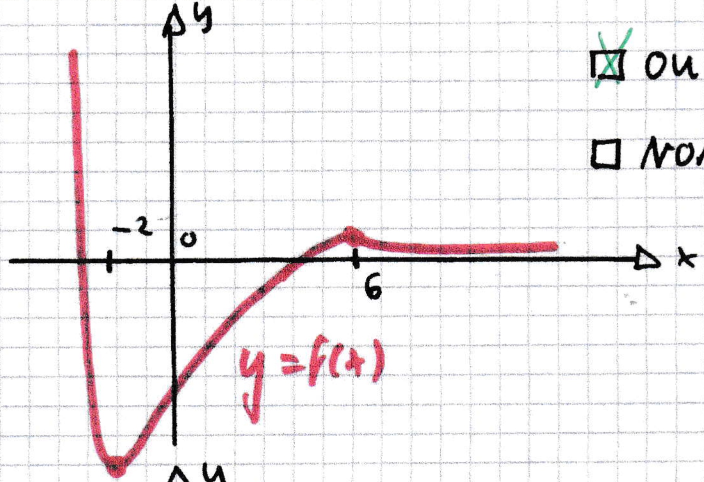

☐ OUI

☒ NON Justification:

-2 et 6 sont des extrema, pas des zeros!!

1

②

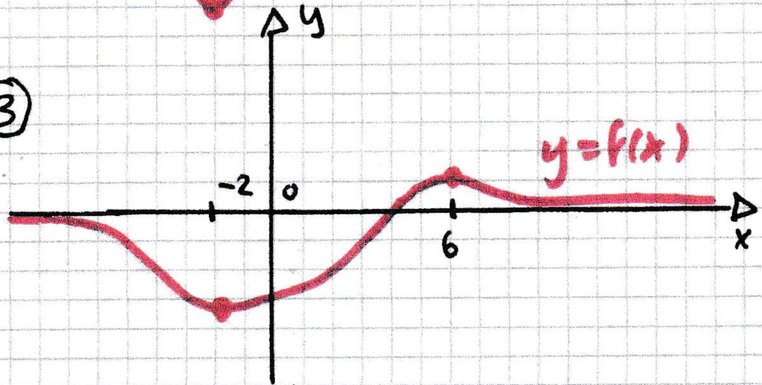



☒ OUI

☐ NON Justification:

0,5

③



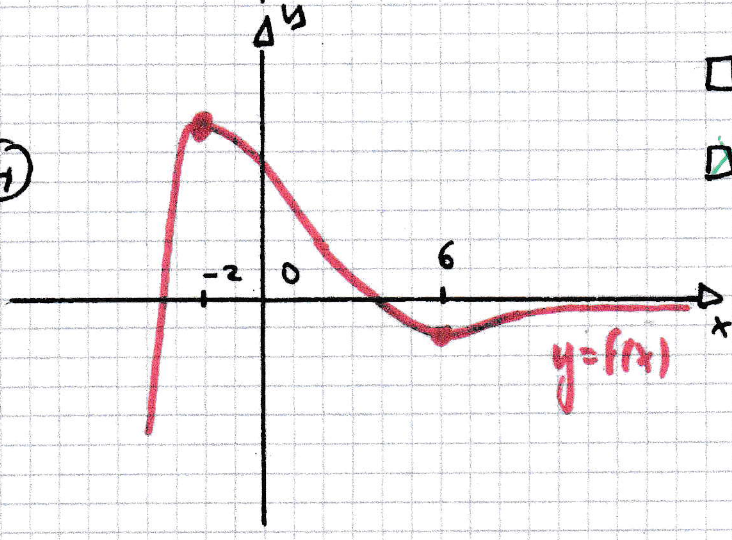

☐ OUI

☒ NON Justification:

pas d'AH à gauche!!

1

④




☐ OUI

☒ NON Justification:

1

inversion des signes

$f(6) = (36 - 12 - 14)e^{-6} = 10e^{-6} \simeq 0{,}025$. 0,5

Il y a deux extrema : $MIN(-2\,;\,-6e^{2}) \simeq (-2\,;\,-44{,}33)$

$MAX(6\,;\,10e^{-6}) \simeq (6\,;\,0{,}025)$. 0,5

c. Déterminer l'équation de la tangente au graphe au point d'abscisse $x=-3$

$t: y=mx+h$ avec $m=f'(-3) = -e^3\underbrace{((-3)^2-4(-3)-12)}_{9} = -9e^3$

i.e. $t: y=-9e^3x+h$.

$t$ passe par le point de contact $T(-3; f(-3)) = (-3; e^3)$ :

$$e^3=-9e^3\cdot(-3)+h \Leftrightarrow h=e^3-27e^3=-26e^3.$$

Ainsi $t: y=-9e^3x-26e^3$.

---

**Problème 2.**

A- On donne $f(x)=\ln(-3x^2+7x-4)$.

a. Déterminer $ED(f)$.

On a : $-3x^2+7x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-7\pm\sqrt{49-48}}{-6}=\dfrac{-7\pm1}{-6}$ < $1$ ; $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

D'où le signe de $-3x^2+7x-4$ :

| $x$ | | $1$ | | $4/3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $-3x^2+7x-4$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

] ——— [

Ainsi $ED(f)=\left]1;\frac{4}{3}\right[$.

b. Dériver $f(x)$. $f'(x)=\dfrac{-6x+7}{-3x^2+7x-4}=\dfrac{6x-7}{3x^2-7x+4}$

B- Calculer les dérivées des fonctions suivantes (factoriser et simplifier le cas échéant)

c. $g(x)=e^{-x}(x^2-3x+1)$

$g'(x)=-e^{-x}(x^2-3x+1)+e^{-x}(2x-3)=e^{-x}(-x^2+5x-4)$
$=-e^{-x}(x^2-5x+4)=$
$=-e^{-x}(x-4)(x-1)$.

d. $h(x)=\dfrac{x^2e^x}{(x-1)^2}$

Voir plus loin

C- Calculez (simplifiez lorsque c'est possible).

|.| inutile !

5

e. 2,5

$$\int_1^3 \frac{2x}{3x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{3\cdot 2x}{3x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^3 \frac{6x}{3x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln(3x^2+1)\Big|_1^3$$

$f$ ; $f' = 6x$ $\qquad \frac{f'}{f}$ $\qquad$ 0,5 $\qquad$ (1)

$$= \frac{1}{3}\ln 28 - \frac{1}{3}\ln 4 = \frac{1}{3}\ln\frac{28}{4} = \frac{1}{3}\ln 7.$$

(1)

f. 2,5

$$\int \frac{x^3+x^2+x+4}{x+1}\,dx = \int\left(x^2+1+\frac{3}{x+1}\right)dx = \frac{1}{3}x^3+x+3\ln|x+1|+c.$$

0,5 $\qquad$ (1)

Division polynômiale :

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+x+4 & x+1 \\ \hline -(x^3+x^2) & x^2+1 \\ \hline x+4 & \\ -(x+1) & \\ \hline 3 & \end{array}$$

(1)

27,5

2Bd $\quad$ 2

$$\left(\frac{x^2e^x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2xe^x+x^2e^x)(x-1)^2 - x^2e^x\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

(1)

$$= \frac{\cancel{(x-1)}\,xe^x\left[(2+x)(x-1)-2x\right]}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{xe^x\left[(2x-2+x^2-x)-2x\right]}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{xe^x(x^2-x-2)}{(x-1)^3} = \frac{xe^x(x-2)(x+1)}{(x-1)^3}$$

(1)