Etude complète de la fonction $f(x) = \dfrac{-5x^2-14x+3}{x^2+6x-7}$

- <u>ED</u> : $f(x)$ non-définie $\Leftrightarrow x^2+6x-7 = (x+7)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \,;\, x = -7$

d'où $ED(f) = \mathbb{R} \setminus \{-7;1\}$.

- <u>Zéros et signe de f</u> : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -5x^2-14x+3 = 0 \Leftrightarrow$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196+60}}{-10} = \frac{14 \pm \sqrt{256}}{-10} = \frac{14 \pm 16}{-10} \begin{cases} -3 \\ \frac{1}{5} \end{cases}$$

D'où le signe de f :

x		-7		-3		$\frac{1}{5}$		1	
$-5x^2-14x+3$	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$
x^2+6x-7	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
f	$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$

- <u>Asymptotes et position relative</u> :

<u>AV</u> :

$$\lim_{x \to -7} \frac{-5x^2-14x+3 \to -144}{x^2+6x-7 \to 0} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{-5x^2-14x+3 \to -16}{x^2+6x-7 \to 0} = \infty$$

Il y a deux AV en $x=-7$ et $x=1$.

<u>AH</u> : Par division :

$$\begin{array}{r|l} -5x^2-14x+3 & x^2+6x-7 \\ \hline -(-5x^2-30x+35) & -5 \\ \hline 16x-32 & \end{array}$$

AH : $y = -5$

$\delta(x) = \dfrac{16(x-2)}{x^2+6x-7}$

On a $\delta(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. D'où la position relative du graphe de f par rapport à l'asymptote horizontale :

x		-7		1		2	
δ	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
f		$\parallel$		$\parallel$			

· Dérivée et variations (y.c. coordonnées des extrema éventuels) :

$$f'(x) = \frac{(-10x-14)(x^2+6x-7) - (-5x^2-14x+3)(2x+6)}{(x^2+6x-7)^2} =$$

$$= \frac{-10x^3-60x^2+70x-14x^2-84x+98-(-10x^3-30x^2-28x^2-84x+6x+18)}{(x^2+6x-7)^2} =$$

$$= \frac{-16x^2+64x+80}{(x^2+6x-7)^2} = \frac{-16(x^2-4x-5)}{(x^2+6x-7)^2} = \frac{-16(x-5)(x+1)}{(x+7)^2(x-1)^2}.$$

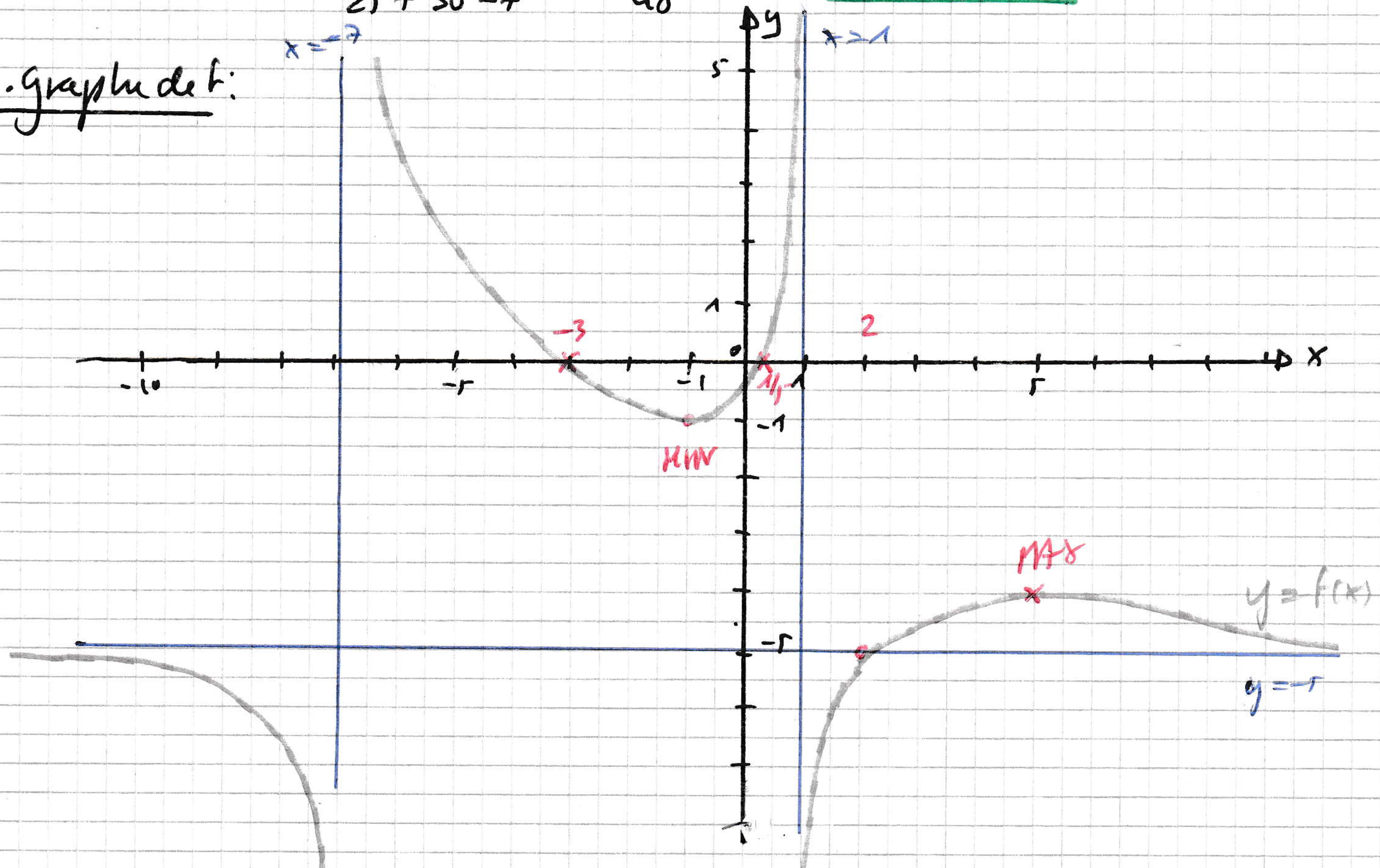
On a : $f'(x)=0 \iff x=-1 ; x=5$. D'où le tableau des variations :

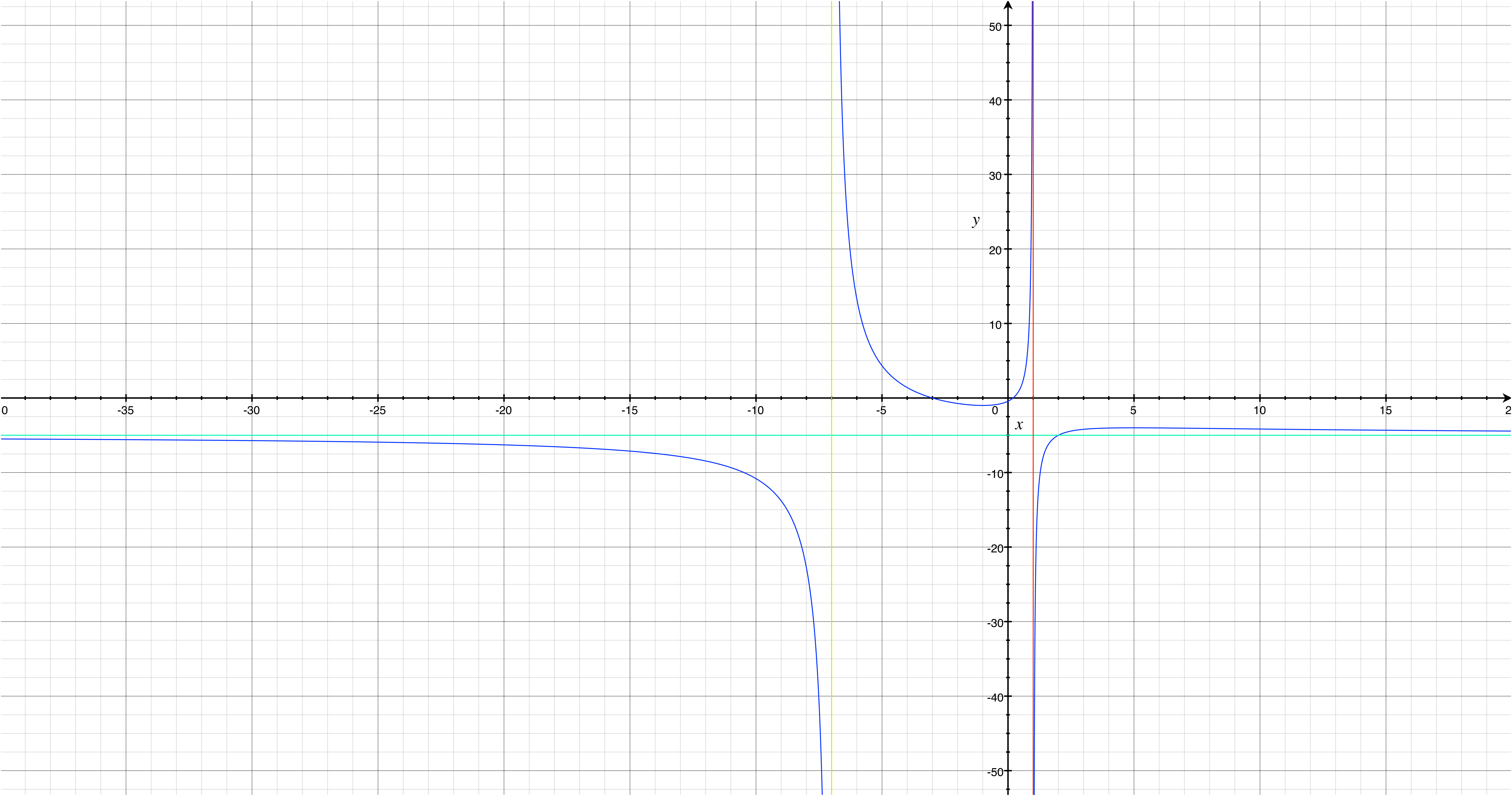
x		-7		-1		1		5	
$-16x^2+64x+80$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$(x^2+6x-7)^2$	$+$	0	$+$		$+$	0	$+$		$+$
f'	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
f	↘	‖	↘	MIN	↗	‖	↗	MAX	↘

On a : $f(-1) = \frac{-5+14+3}{1-6-7} = \frac{12}{-12} = -1$ $\quad$ MIN$(-1;-1)$

$f(5) = \frac{-125-70+3}{25+30-7} = \frac{-192}{48} = -4$ $\quad$ MAX$(5;-4)$

· Graphe de f :





y
x
50
40
30
20
10
-10
-20
-30
-40
-50
0
-35
-30
-25
-20
-15
-10
-5
5
10
15
2

1 **Partie B** - g. Déterminez les angles sous lesquels le graphe de f coupe l'axe Ox.

3,5

On a vu que $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-3$ et $x=\frac{1}{5}$ et que : (0,5)

$$f'(x) = \frac{-16x^2+64x+80}{(x^2+6x-7)^2}.$$

• en $x=-3$: $m = f'(-3) = \frac{-144-192+80}{(9-18-7)^2} = \frac{-256}{256} = -1 = \tan\alpha_{-3}$ (1)

$\Leftrightarrow \alpha_{-3} = -45°.$ (0,5)

• en $x=\frac{1}{5}$: $m = f'\left(\frac{1}{5}\right) = \dfrac{-\frac{16}{25}+\frac{64}{5}+80}{\left(\frac{1}{25}+\frac{6}{5}-7\right)^2} = \dfrac{\frac{2304}{25}}{\frac{144^2}{25^2}} = \frac{2304}{\cancel{25}} \cdot \frac{25^{\cancel{2}}}{144^2} =$

$= 2,7 = \tan\alpha_{1/5}$ (1) $\Leftrightarrow$

$\alpha_{1/5} = 70,201°$ (0,5)

2. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{ax^2+8x+b}{2x^2+c}$ Déterminez les nombres réels a, b et c sachant que :

4,5

i. $x=-2$ et $y=3$ sont des asymptotes de f ;

ii. le graphe de f passe par le point $P\left(-3;\dfrac{39}{10}\right)$.

(0,5)

• $x=-2$ est une AV : le dénominateur s'annulle donc pour $x=-2$: (0,5)

1,5 $2\cdot(-2)^2+c=0 \Leftrightarrow 8+c=0 \Leftrightarrow c=-8$: $f(x) = \dfrac{ax^2+8x+b}{2x^2-8}$

(0,5)

1,5 • $y=3$ est une AH, donc $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+8x+b}{2x^2+c} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2}{2x^2} = \dfrac{a}{2} = 3 \Leftrightarrow a=6$ (1)

$f(x) = \dfrac{6x^2+8x+b}{2x^2-8}$

(0,5)

1,5 • $P \in Gr(f)$, donc $\dfrac{39}{10} = f(-3) = \dfrac{54-24+b}{2(-3)^2-8} = \dfrac{30+b}{18-8} = \dfrac{30+b}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 30+b=39 \Leftrightarrow b=9.$ (1)

Ainsi : $a=6$, $b=9$, $c=-8$.

3. 9

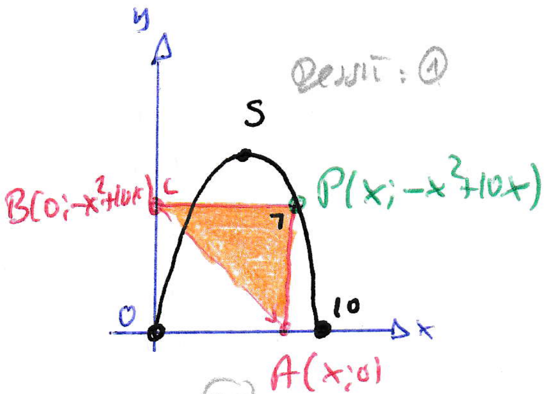
GAP - Standard - Août 2017.

Soit la parabole d'équation $y = -x^2 + 10x$ et P un point de cette parabole situé dans le premier quadrant. On projette le point P sur l'axe Ox pour obtenir un point A. On projette le point P sur l'axe Oy pour obtenir un point B.

a. Calculez l'aire du triangle APB en fonction de x.

b. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle est-elle maximale ?

c. Quelle est la valeur de cette aire ?



a. $f(x) = -x^2+10x$.

4,5

On a : $f(x) = -x(x-10) = 0 \iff \begin{cases} x=0 \\ x=10 \end{cases}$

$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{-2} = 5$, $y = f(5) = 25$

Les coordonnées de A et B sont :

0,5 0,5

$A(x;0)$, $B(0;-x^2+10x)$ car celles de P sont $P(x;f(x))$

0,5

L'aire du triangle rectangle APB est : $A(x) = \frac{1}{2}\cdot AP \cdot BP =$

0,5 1

$= \frac{1}{2}\cdot(-x^2+10x)\cdot x = \frac{1}{2}(-x^3+10x^2) = A(x)$, avec $0 \leq x \leq 10$.

0,5 1

b. On a : $A'(x) = \frac{1}{2}(-3x^2+20x) = 0 \iff -x(3x-20) = 0 \iff \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{20}{3} < 10 \end{cases}$

3

Variations :

x	0		$\frac{20}{3}$		10
A'		+	0	−	
A		↗	MAX	↘	

1

L'aire du triangle est maximale pour $x = \frac{20}{3}$. $\approx 6,\overline{6}$ 0,5

0,5

c. Elle vaut : $A\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\left(\frac{20}{3}\right)^3 + 10\cdot\left(\frac{20}{3}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{8000}{27} + 10\cdot\frac{400}{9}\right) =$

1,5 1

$= \frac{1}{54}(-8000+12000) = \frac{4000}{54} = \frac{2000}{27}$. $\cong 74,\overline{074}$