

Exponentielle et Logarithme - 2ème année

NOM et PRENOM : CONNIGÉ Il faut tout justifier et expliquer!

LA CALCULATRICE : EST ☐ AUTORISÉE!

1. Calculez – donnez la réponse sous forme de nombre entier ou de fraction :

a. $\exp_3 4 = 3^4 = \underline{81}$

b. $\exp_{\frac{2}{3}} 3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \underline{\frac{8}{27}}$

c. $\exp_{64} \left(-\frac{2}{3}\right) = 64^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{4^2} = \underline{\frac{1}{16}}$

d. $\log_4 \frac{1}{\sqrt[3]{16}} = \log_4 4^{-\frac{2}{3}} = \underline{-\frac{2}{3}}$

e. $\log_{169} (\sqrt[5]{13}) = \log_{169} \sqrt[5]{169^{\frac{1}{10}}} = \log_{169} 169^{\frac{1}{10}} = \underline{\frac{1}{10}}$

f. $\log_2 512 = \log_2 2^9 = \underline{9}$

2. a. Décomposez l'expression suivante à l'aide des propriétés des logarithmes et simplifiez

lorsque c'est possible : $\log_a \left(\frac{a^3 \sqrt[4]{b^3 c}}{\sqrt[4]{d^5}} \right) =$

$$\begin{aligned} \log_a \left(\frac{a^3 \sqrt[4]{b^3 c}}{\sqrt[4]{d^5}} \right) &= \log_a (a^3 \sqrt[4]{b^3 c}) - \log_a (\sqrt[4]{d^5}) = \\ &= \log_a a^3 + \log_a \sqrt[4]{b^3} + \log_a c - \log_a d^{\frac{5}{4}} = 3 + \log_a b^{\frac{3}{4}} + \log_a c - \frac{5}{4} \log_a d = \\ &= 3 + \frac{3}{4} \log_a b + \log_a c - \frac{5}{4} \log_a d. \end{aligned}$$

- b. Groupez l'expression suivante à l'aide des propriétés des logarithmes et simplifiez lorsque c'est possible :

$$2\log_3 5 + \frac{1}{2}\log_3 4 + 3 - \frac{1}{3}\log_3 2 - 3\log_3 6 =$$

$$\begin{aligned} &= \log_3 5^2 + \log_3 4^{1/2} + \log_3 3^3 - \log_3 2^{1/3} - \log_3 6^3 = \\ &= \log_3 \frac{5^2 \cdot 4^{1/2} \cdot 3^3}{2^{1/3} \cdot 6^3} = \log_3 \frac{25 \cdot 2 \cdot 3^3}{3 \sqrt{2} \cdot 6^3} = \log_3 \frac{25 \cdot 2}{3 \sqrt{2} \cdot 2^3} = \log_3 \frac{25}{8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

3. Dans un gymnase lausannois (que nous ne citerons pas), un élève d'un groupe de Maths, appelons-le Sachem Ribase (nom d'emprunt, vrai nom connu de la rédaction), met du temps à enlever son bonnet en début de leçon. Lors de la première semaine de cours de la deuxième année, il lui a fallu au total 10 minutes sur l'ensemble de la semaine pour ôter son bonnet. On sait qu'une année scolaire comporte 36 semaines de cours et que chaque semaine, le temps hebdomadaire (en minutes) diminue de 2%.
- a. Etablir soigneusement la formule donnant le nombre de minutes hebdomadaires nécessaires à Sachem pour ôter son bonnet.

Formule générale : $M(t) = y^t \cdot M_0 = 0,98^t \cdot 10$ où $t = \text{semaine}$

ou : $M(t) = 0,98^{t-1} \cdot 10$: $t = 1$ deuxième 1^{ère} de l'année.

$1 - 2\% = 0,98$

- b. De combien de minutes aura-t-il besoin pour ôter son bonnet durant la 5ème semaine de cours de deuxième année (en minutes et secondes) ?

$$\text{d'où } M(5) = 0,98^4 \cdot 10 = 9,224 \text{ min} = \underline{9 \text{ min } 13 \text{ sec}} \quad (0,42)$$

- c. De combien de minutes a-t-il eu besoin pour ôter son bonnet durant la 3ème semaine de cours de la première année (en minutes et secondes) ? (on admet que la variation de 2% était déjà valable en première !)

3ème semaine de 1ère année : c'est -34 semaines pour G :

$$M(-34) = 0,98^{-35} \cdot 10 = 20,281 \text{ min} = \underline{20 \text{ min } 17 \text{ sec}} \quad (16,85)$$

- d. Durant quelle semaine (de quelle année) aura-t-il besoin de 7 minutes et 30 secondes pour ôter son bonnet ?

$$\text{À résoudre : } M(t) = 0,98^{t-1} \cdot 10 = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 0,98^{t-1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t-1 = \log_{0,98} \frac{3}{4} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{3}{4}}{\ln 0,98} + 1 = 15,24 : \underline{\text{la 16ème semaine de deuxième année}}$$

- e. Arrivera-t-il à ôter son bonnet en 2 minutes (sur une semaine) d'ici la fin de ses études gymnasiales s'il ne redouble aucune année ?

M1: Fin d'études : $2 \cdot 36 = 72$ semaines.
 Or $M(72) = 0,98^{72} \cdot 10 = 2,38 > 2$: NON : il n'y arrivera pas.
 [M2: On veut $M(t) = 0,98^{t-1} \cdot 10 = 2 \Leftrightarrow 0,98^{t-1} = \frac{2}{10} = 0,2 \Leftrightarrow t-1 = \log_{0,98} 0,2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow t = 1 + \log_{0,98} 0,2 = 1 + \frac{\ln 0,2}{\ln 0,98} = 80,7 \text{ semaines} > 72$: NON]

4. Résolvez les équations suivantes en précisant à chaque fois ED (réponses exactes) :

a. $8^x = \frac{1}{64} \Leftrightarrow x = \log_8 \frac{1}{64} = -\log_8 64 = -\log_8 8^2 = \underline{-2}$

ED = $\mathbb{R}$

b. $\log_x 3 = 4 \Leftrightarrow 3 = x^4 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{3}$. (comme $x < 0$ est exclu (ED)) : $x = \sqrt[4]{3}$.

ED = $]0,1[\cup]1,+\infty[= \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$

c. $\log_2(2x^2 - 5x + 3) = \log_2(x+1) + \log_2(x+3)$

• ED : $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} < \frac{3}{2}$
 Cond: $] -1,1[\cup] \frac{3}{2}, +\infty[$
 $\left. \begin{array}{l} x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1 \\ x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3 \end{array} \right\} \text{Donc ED} = \underline{]-1,1[\cup] \frac{3}{2}, +\infty[}$

• Résolution : $\log_2(2x^2 - 5x + 3) = \log_2[(x+1)(x+3)] \stackrel{\text{exp}_2}{\Leftrightarrow}$
 $2x^2 - 5x + 3 = x^2 + 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 9x = x(x-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \in \text{ED} \\ x=9 \in \text{ED} \end{cases}$

Donc ES = $\{0, 9\}$.