Exponentielle et méthodes d'intégration

NOM et PRENOM : CORRIGÉ *Il faut tout justifier et expliquer !*

1. On donne la fonction $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 4}$.

a. Déterminez $ED(f)$.

$e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$. D'où $ED(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln 4\}$.

b. Déterminez les asymptotes de f.

$\cdot \lim\limits_{x \to \ln 4} \dfrac{e^x+2}{e^x-4} = \infty$: Il y a une AV en $x = \ln 4$.

$\cdot \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x+2}{e^x-4} \circledast = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{e^x}(1+\frac{2}{e^x})}{\cancel{e^x}(1-\frac{4}{e^x})} = 1$: $y = 1$ est AH à droite.

$\cdot \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x+2}{e^x-4} = -\dfrac{1}{2}$: $y = -\frac{1}{2}$ est AH à gauche.

Méthode alternative [$\circledast$ Bernoulli-l'Hospital s'applique $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$: $\ldots = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$.]

c. Calculez la première et la deuxième dérivée de f.

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-4) - (e^x+2)\cdot e^x}{(e^x-4)^2} = \frac{e^x(e^x-4-e^x-2)}{(e^x-4)^2} = \frac{-6e^x}{(e^x-4)^2} = f'(x)$$

$$f''(x) = \frac{(-6e^x)(e^x-4)^{\cancel{2}} - (-6e^x)\,2\cancel{(e^x-4)}\cdot e^x}{(e^x-4)^{\cancel{4}\,3}} = e^x\,\frac{-6(e^x-4)+12e^x}{(e^x-4)^3} =$$

$$= \frac{-6e^x+24+12e^x}{(e^x-4)^3}e^x = \frac{24+6e^x}{(e^x-4)^3}e^x = f''(x) = \frac{6e^x(e^x+4)}{(e^x-4)^3}$$

d. Sous quel angle le graphe de f coupe-t-il la droite d'équation $y = -2$?

Intersection : $\dfrac{e^x+2}{e^x-4} = -2 \Leftrightarrow e^x+2 = -2e^x+8 \Leftrightarrow 3e^x = 6 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$.

Comme la droite est horizontale, on cherche l'angle directeur en $\ln 2$ i.e. :

$\tan\alpha = m = f'(\ln 2) = \dfrac{-6\cdot e^{\ln 2}}{(e^{\ln 2}-4)^2} = \dfrac{-6\cdot 2}{(2-4)^2} = -\dfrac{12}{4} = -3 \Leftrightarrow \alpha \cong -71{,}57°$

2. a. Calculez $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

petite généralisation de la propriété.

La fonction est impaire ! On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \underline{0}$. (bornes symétriques)

Méthode alternative

[avec limite : f étant impaire : $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} xe^{-x^2}dx \overset{f\text{ impaire}}{\underset{\text{bornes sym}}{=}} \lim_{a\to+\infty} 0 = 0$.]

b. Déterminez l'aire géométrique non bornée totale comprise entre le graphe de la fonction $f(x) = xe^{-x^2}$ et l'axe Ox.

f est positive sur $[0;+\infty[$. L'aire géométrique sur $[0;+\infty[$ égale celle sur $]-\infty;0]$ (f impaire).

Alors:

$$\mathcal{A} = 2\cdot\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 2\cdot\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} xe^{-x^2}dx = 2\cdot\lim_{a\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{a} =$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\lim_{a\to+\infty}\left[e^{-a^2}-1\right] = -\cdot\left[0-1\right] = \underline{1}.$$

c. Calculez $\int x^2e^{-x}\,dx$.

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} + \left[-2xe^{-x} + \int 2e^{-x}dx\right] =$$

ipp1 $\begin{cases} u = x^2 ; u' = 2x \\ v' = e^{-x} ; v = -e^{-x} \end{cases}$ ipp2 $\begin{cases} u = 2x , u' = 2 \\ v' = e^{-x} ; v = -e^{-x} \end{cases}$

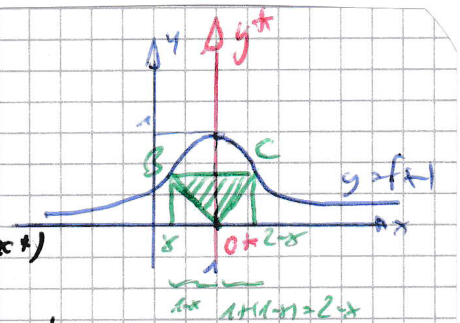
$$\underline{= e^{-x}\left[-x^2-2x-2\right] + C}$$

---

3. On donne la fonction $f(x) = e^{-(x-1)^2}$.

a. Prouvez que la droite $x = 1$ est un axe de symétrie du graphe de f.

Nouveau système de coordonnées : $\begin{cases} x^* = x-1 \quad \Rightarrow x = x^*+1 \\ y^* = y \end{cases}$



Alors : $y^* = y = f(x) = f(x^*+1) = e^{-(x^*+1-1)^2} = e^{-(x^*)^2} = g(x^*)$

qui est paire. Ainsi $x=1$ est bien un axe de symétrie du graphe.

b. On construit un triangle ABC isocèle en A comme suit :

- $A(1;0)$ est le sommet ;
- le segment BC est horizontal ;
- B et C sont sur le graphe de f.

Déterminez les abscisses des points B et C de sorte que l'aire du triangle ABC soit maximale.

M1. Soient $1-\alpha$, $1+\alpha$ les abscisses de B et A $(\alpha \geq 0)$. L'aire du triangle est : $\frac{1}{2}[1+\alpha-(1-\alpha)]\cdot f(1-\alpha) = \frac{1}{2}2\alpha \cdot e^{-(\alpha)^2} = \alpha e^{-\alpha^2} = \delta(\alpha)$, avec $\alpha \geq 0$.

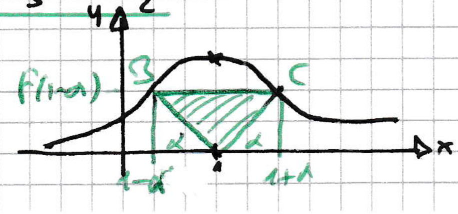
On a : $\delta'(\alpha) = 1\, e^{-\alpha^2} + \alpha\cdot e^{-\alpha^2}\cdot(-2\alpha) = e^{-\alpha^2}(1-2\alpha^2) = 0 \iff \alpha \overset{\alpha>0}{=} (\pm)\sqrt{\frac{1}{2}}$

Variations :

α	0		$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	
δ'		$+$	0	$-$
δ	0	↗	MAX	↘

L'aire est maximale pour $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i.e.

$x_C = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x_B = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Méthode alternative :

M2 : Soit $B(x; f(x)) = B(x; e^{-(x-1)^2})$. Alors $C(2-x; e^{-(1-x)^2})$ avec $x \leq 1$

D'où $BC = (2-x)-x = 2-2x$ et $\delta(\Delta ABC) = \frac{1}{2}(2-2x)\cdot e^{-(1-x)^2} = (1-x)e^{-(1-x)^2}$.

L'aire est maximale : $\delta'(x) = -1e^{-(1-x)^2} + (1-x)e^{-(1-x)^2}\cdot(-2)(1-x)(-1)$

$= -e^{-(1-x)^2} + 2(1-x)^2 e^{-(1-x)^2} = e^{-(1-x)^2}(-1+2(1-x)^2) =$

$= e^{-(1-x)^2}(2x^2-4x+1) = 0 \iff x = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4} = \frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ < $1{,}707$; $0{,}293$

variations :

x		$0{,}293$		1
δ'	$+$	0	$-$	
δ	↗	MAX	↘	0

L'aire est maximale pour $\frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} = x_B$ et $x_C = 2-(1-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.