Algèbre Linéaire - 1 et 2

NOM et PRENOM : *Il faut tout justifier et expliquer !*

1. **Théorie.** a. **Définition :** Une base d'un espace vectoriel V est ...
 - b. Prouvez – avec la définition – que la famille $F = ((2; -3), (1; 5))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, puis exprimez le vecteur $v(-1; 3)$ dans cette base.
 - c. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Prouvez que $\text{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f((x; y; z)) = (2x - y; x + z; y - z)$.
 - a. Prouvez que f est un homomorphisme.
 - b. Déterminez le noyau et l'image de f . f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
 - c. Déterminez la matrice de f dans la base canonique.

3. On donne la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'un homomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

- a. Donnez l'expression de $f : f((x; y)) = \dots$
- b. Déterminez l'image de f (avec la définition de l'image) et décrivez-la géométriquement.
- c. Déterminez l'image de f selon une autre méthode que dans la partie b.
- d. Déduisez-en $\text{Ker}(f)$. Que peut-on alors dire ?