Algèbre Linéaire - 1 : Episode I

NOM et PRENOM : .... *Il faut tout justifier et expliquer !*

1. **Théorie.** a. Prouvez le résultat suivant : *Soit V un espace vectoriel. L'intersection de trois sous-espaces vectoriels de V est encore un sous-espace vectoriel de V.*

b. Donnez la définition d'une *famille libre* d'un espace vectoriel V.

c. Donnez un exemple de groupe $(G, *)$ qui n'est pas abélien (pas de justification demandée !)

2. Soit $G = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ muni de l'addition

$$+ : (x; y; z) + (x'; y'; z') = (x + x' - 1; y + y'; z + z' + 5)$$

a. Prouvez que cette addition est bien une loi de composition interne sur G.

b. Prouvez l'existence d'un élément neutre dans G et donnez-le.

c. Prouvez que tout élément de G possède un inverse et donnez cet inverse.

d. On admet que $(G, +)$ est un groupe abélien et on le munit de la multiplication habituelle de $\mathbb{R}^3$. $(G, +, .)$ est-il un espace vectoriel ?

- si OUI : prouvez-le ;
- si NON : donnez un contre-exemple.

3. Soit $F = ((1; 2; -1), (3; 1; 4), (-9; 2; -19))$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Cette famille est-elle linéairement indépendante ?

- si OUI : prouvez-le avec la définition ;
- si NON : prouvez-le avec la définition, puis donnez deux combinaisons linéaires différentes possibles pour cette famille.

4. On munit $\mathbb{R}^3$ et $M_2(\mathbb{R})$ des lois habituelles.

a. Prouvez que $A = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 4y + 9z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b. $E = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{12} = 2(a_{21} + a_{22})\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$?